[5] L. Pitt. *A gaussian correlation inequality for symmetric convex sets.* Ann. Prob., **5(3)** (1977), 470–474.

[6] A.S. Krishnamoorthy, M. Parthasarathy. *A multivariate gamma-type distribution.* Ann. Math. **22** (1951), 549–557.

[7] T. Royen. *A simple proof of the Gaussian correlation conjecture extended to multivariate gamma distributions.* Far East Journal Theor. Stat. **48** (2014), 139–145.

[8] G. Schechtman, T. Schlumprecht, J. Zinn. (1967) *On the gaussian measure of the intersection.* Ann. Prob. **28**(1) (1967), 346–357.

[9] Z. Sidak. *Rectangular confidence regions for the means of multivariate normal distributions.* J. Amer. Stat. Assoc. **62** (1967), 626–633.

[10] N. Wolchover. *A long-sought proof found and almost lost.* Quantamagazine (2017). (`https://www.quantamagazine.org/`)

# La ciència dels sistemes complexos al Centre de Recerca Matemàtica

Álvaro Corral, Alex Roxin i Tomás Alarcón
Centre de Recerca Matemàtica

## Els sistemes complexos

Durant els darrers cent anys, la física ha procedit a expandir les seves fronteres cap al més petit (l'àtom, el nucli, els quarks) i cap al més gran (les galàxies, l'expansió de l'univers...), la qual cosa ha requerit i propiciat important avenços matemàtics.

Podem trobar una altra frontera de la ciència molt més a prop nostre: la dels sistemes complexos. I què són els sistemes complexos? Si fossin fàcils de definir voldria dir que no són complexos; de tota manera, com en altres coses a la vida, podem reconèixer un sistema complex quan el veiem: un fluid turbulent, el clima, l'economia, la política, la cèl·lula, el cervell, els ecosistemes, les ciutats, internet... Pràcticament tots els problemes que afronta la humanitat al segle XXI venen de la nostra limitada capacitat de comprendre els sistemes complexos [16]. A partir d'aquesta enumeració podem constatar que algunes característiques comunes d'aquests sistemes són:

- Primer, que es componen de moltíssimes parts o unitats (al contrari que els sistemes més paradigmàtics de la física, com l'àtom d'hidrogen o el sistema solar).
- Segon, que el comportament del sistema no és caracteritza pel comportament de les seves parts, sinó que hi ha un comportament global emergent, o, com va dir Aristòtil, el tot és més que la suma de les parts (en contraposició al que passa amb altres paradigmes de la física, com un gas ideal o un material paramagnètic). Això vol dir que el procediment reduccionista habitual en física de descompondre el tot en les seves parts i investigar aquestes parts per separat simplement no funciona amb els sistemes complexos.
- Tercer, que són sistemes allunyats de l'equilibri (no com passa, per exemple, amb una de les fites de la física del segle XX, el model d'Ising).

L'hipotètic lector o lectora haurà notat que als nostres exemples hem barrejat sistemes que pertanyen a disciplines diverses: la física, les ciències socials, la biologia... Llavors, la ciència dels sistemes complexos és una part de la física? Potser pel que va dir l'eminent físic Sam Edwards, que física és allò que fan els físics, simplement [3]. Certament, avui dia un gran nombre de físics han començat a estudiar aquesta mena de sistemes, avorrits dels recargolaments infructuosos de les teories de cordes, supercordes, etcètera [5, 11].

Al Centre de Recerca Matemàtica (CRM), de Bellaterra, creiem que la ciència dels sistemes complexos és massa complexa per deixar-la només als físics (i encara més als biòlegs, sociòlegs, etcètera) i que els matemàtics no

sols tenen cabuda en aquesta empresa sinó que poden tenir un paper principal.

Realment, l'equació de Schrödinger, les equacions de Maxwell o la relació de Clausius-Clapeyron no formarien part del bagatge general per endinsar-se en aquesta recerca, però sí la teoria dels sistemes dinàmics, la dels processos estocàstics, la de la informació, la de jocs, la topologia de xarxes, les equacions en derivades parcials, els mètodes numèrics, l'estadística i l'anàlisi de *big data*, la intel·ligència artificial, etcètera [9]. En realitat, podríem considerar la ciència dels sistemes complexos no com una part de la física, sinó com una «ciència total», pel seu caràcter eminentment interdisciplinari, però en la qual una bona base en matemàtica aplicada i tècniques de simulació és imprescindible.

A banda de l'interès de cada sistema particular, la qüestió clau és: com pot ser que l'univers va començar amb uns pocs tipus de partícules elementals i va arribar a la vida, la història, l'economia, i la literatura? Per què el Big Bang no va formar un gas simple de partícules o va condensar en un gran pedrot? En definitiva, per què a totes les escales apareix complexitat [1]?

De fet, les primeres idees sobre sistemes complexos a Catalunya van aparèixer en el camp de la biologia, gràcies a l'agudesa del gran ecòleg Ramon Margalef. La seva empenta va influir l'inquiet físic Jorge Wagensberg, però no va ser fins a principis dels anys noranta que es va iniciar la consolidació de la ciència dels sistemes complexos a Catalunya, mitjançant uns pocs investigadors joves, que, de manera independent i un xic solitària, van decidir cabussar-se en aquest món. Gairebé amb tota seguretat, els camps més conreats són el dels sistemes biològics i les xarxes complexes, però els tentacles d'aquesta comunitat arriben avui dia fins a l'anomenada econofísica, la lingüística (lingüística quantitativa), la geociència no lineal, i tornen finalment cap a la mateixa física.

Des del Centre de Recerca Matemàtica volem incentivar la participació de joves matemàtics en la ciència dels sistemes complexos (joves de qualsevol edat). Els grups de recerca del centre amb connexió més directa amb la complexitat són el Grup de Sistemes Complexos, el Grup de Neurociència Computacional i el Grup de Biologia Matemàtica i Computacional. Tot seguit resumim les idees de la seva recerca.

## Desastres naturals i formes de comunicació

El grup del CRM que es va apropiar del nom dels sistemes complexos centra la seva investigació en fenòmens que presenten propietats estadístiques «anòmales», en el sentit que es caracteritzen per distribucions de probabilitats amb cues llargues i sense moments (sense variança i inclús sense mitjana). Hi ha dos sistemes fonamentals amb aquestes característiques, que s'han estudiat en el grup: els desastres naturals i el llenguatge humà.

Considerem l'energia radiada pels terratrèmols. Un sisme de magnitud 6 té associada una energia similar a la de la bomba d'Hiroshima, mentre que un de magnitud 8 radia una energia mil vegades més gran. Un hipotètic megaterratrèmol de magnitud 10 seria $10^6$ vegades més energètic que un de magnitud 6 (la magnitud és, doncs, una escala logarítmica de l'energia).

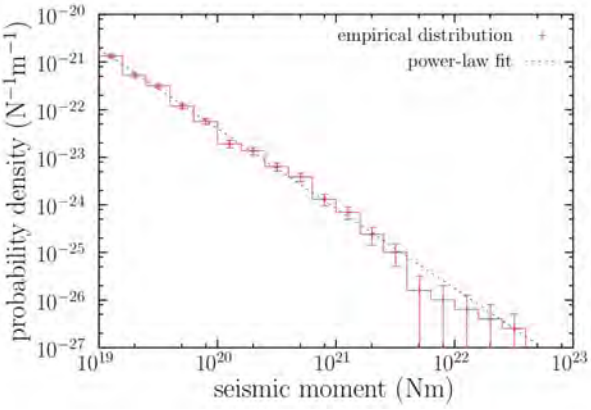
Si en una certa zona fem l'estadística del nombre de terratrèmols en funció de la seva energia, obtenim que, afortunadament, n'hi ha molts de petits i pocs de grans. En concret, la densitat de probabilitat de l'energia $f(E)$ segueix la llei de Gutenberg-Richter [2],

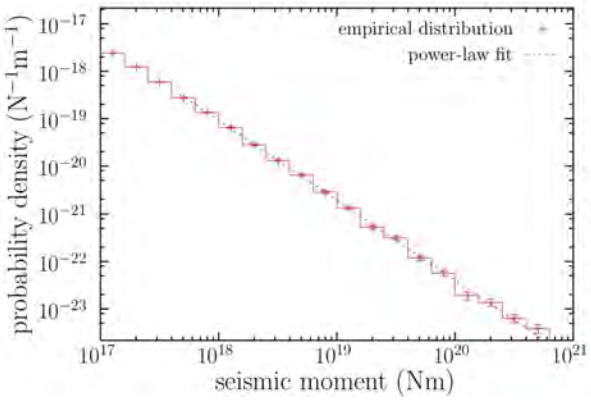
$$f(E) \propto \frac{1}{E^{\beta}},$$

és a dir, la probabilitat $f(E)dE$ que un terratrèmol tingui energia a l'interval entre $E$ i $E+dE$ és una llei de potències (inversa) de l'energia, amb un exponent universal $\beta$ proper a 1,7 o 5/3 (vegeu la figura, el símbol $\propto$ a l'equació indica proporcionalitat).

Aquestes distribucions són molt diferents de les distribucions habituals, com per exemple la coneguda campana de Gauss, que es caracteritza per un valor mitjà i unes certes fluctuacions al voltant d'aquest valor, quantificades per la desviació típica. En canvi, una llei de potències amb un exponent entre 1 i 2 no és que tingui unes fluctuacions enormes, perquè la desviació típica és infinita, sinó que el valor mitjà és també infinit. Una altra propietat de les lleis de potència és la invariança d'escala, que s'il·lustra a la figura (on el moment sísmic

es pot considerar proporcional a l'energia). Encara que aquestes distribucions semblin molt contraintuïtives, la teoria de la probabilitat té eines ben establertes per entendre-les.




Per tant, malgrat que els terratrèmols grans siguin una minoria, són els responsables de l'alliberament de la major part de l'energia, la qual cosa significa un fet molt poc afortunat, contràriament a la conclusió que semblava que ens duia la llei de Gutenberg-Richter.

Com es pot trobar una teoria per explicar una llei tan peculiar com la de Gutenberg-Richter? Una característica dels sistemes complexos és que eludeixen la modelització detallada, precisament per la seva complexitat. Així, els models han de ser més conceptuals que detallats.

Podem considerar que un terratrèmol comença amb una fractura en una regió molt petita, elemental, d'una falla. Aquesta fractura es propagarà o no a les regions veïnes d'una manera aleatòria; a una regió només amb probabilitat $p_1$, a dues regions amb probabilitat $p_2$, a tres amb $p_3$, etcètera i a cap amb $p_0$. Si la fractura es propaga, a aquestes noves regions se'ls aplica la mateixa regla aleatòria, amb independència del que hagi succeït abans [2].

Aquest algorisme tan simple no és res més que el procés de ramificació de Galton i Watson, que té una història gloriosa en la teoria dels processos estocàstics, ja que va ser descobert i redescobert per a l'estudi de l'extinció de les famílies aristocràtiques o per a la investigació de les reaccions nuclears a les primeres bombes atòmiques.

El resultat és que el model presenta una «transició de fase» (com els sistemes termodinàmics) en funció únicament del valor mitjà de la distribució del «nombre de fills». Si aquest és més petit que 1, el procés (la població) s'extingeix més o menys ràpidament, i la distribució del nombre total d'elements (individus, o regions que es fracturen) decau amb rapidesa (exponencialment), la qual cosa és incompatible amb la llei de Gutenberg-Richter.

Si la mitjana del nombre de fills és més gran que 1, llavors el procés té una tendència al creixement maltusià, és a dir, a l'increment exponencial, que tampoc s'adapta al comportament dels terratrèmols. Però si la mitjana del nombre de fills és exactament 1 —i només en aquest cas crític—, aleshores es recupera una llei de potències.

De tota manera, cal una justificació del fet que els terratrèmols estiguin precisament en el «punt crític» del procés de ramificació. Aquest encert no pot ser casualitat. La idea de la criticitat autoorganitzada proporciona una explicació molt enginyosa, mitjançant la idea del model de la pila de sorra, que deixem que els interessats busquin a la literatura científica [1] o a internet.

En realitat, el procés de propagació a aquests models és tan genèric que s'aplica no només a terratrèmols, sinó també a moltes altres catàstrofes naturals que tenen lloc en forma d'allaus, com els incendis forestals, les erupcions volcàniques, o l'extinció de les espècies. Una idea més clara de la recerca del grup en aquests temes la donen les referències [6, 13].

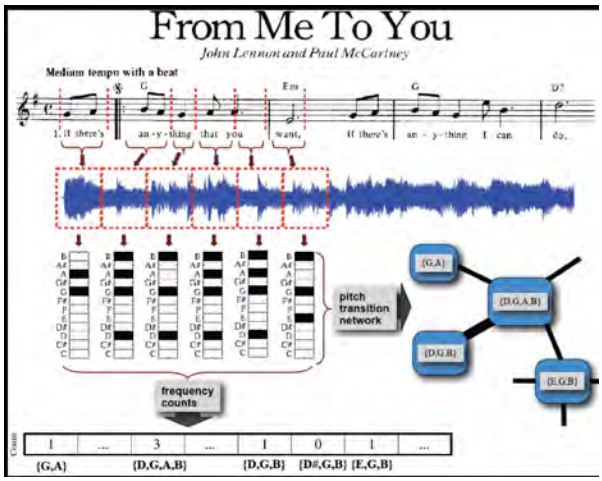
Canviant completament de tema (però no de context matemàtic) podem agafar un llibre, per exemple *El Quijote* i, en lloc de llegir-lo (que implica molt temps), podem comptar

quantes vegades surt cada paraula (de fet, ho farà l'ordinador això). Resulta que unes poques paraules surten moltes vegades («de», «y», «el», etcètera) mentre que moltes paraules surten molt poc («lagaña», «sonsacado», «zahareña», etcètera), però amb una continuïtat en la «raresa» de les paraules, és a dir, no hi ha una divisió clara entre paraules comunes i paraules rares.

De fet, la llei que segueix la repetició de les paraules és la mateixa que l'energia dels terratrèmols, i s'anomena «llei de Zipf», en honor al lingüista que la va descobrir a la primera meitat del segle XX. És molt remarcable que també s'ha proposat que segueixen aquesta llei la població de les ciutats d'un país, el nombre de treballadors de les seves empreses, el nombre de seguidors de cada religió, el nombre d'enllaços en una pàgina web, el nombre d'insectes en una planta, la repetició dels diferents acords en una peça musical, i molts més sistemes socials, tecnològics i biològics. La llei de Zipf descriu una característica de sistemes d'aquesta mena, però aquests presenten més regularitats estadístiques que no tenim temps ni espai de comentar.

Encara que la descripció matemàtica sigui igual per a aquests sistemes i per als desastres naturals, l'explicació en termes de models és ben diferent, ja que no només no s'aplica ni el model de Galton-Watson ni els models de piles de sorra, sinó que no hi ha un model comunament acceptat [7].

Fa més de cinquanta anys el psicòleg George A. Miller i el lingüista Noam Chomsky van estudiar si un mico picant aleatòriament tecles en un teclat produiria un text que seguís la llei de Zipf (com a la figura). A la mateixa època, el que seria premi Nobel d'Economia Herbert Simon va proposar un model completament diferent, en què les paraules en un text es reforcen de la mateixa manera que els rics es fan cada cop més rics (els rics guanyen més diners de la mateixa manera que «de» guanya més repeticions que «lagaña» a *El Quijote*). Aquest model va ser criticat pel famós matemàtic Benoit B. Mandelbrot, que va proposar el seu propi basat en la teoria de la informació, i naturalment, Simon va replicar Mandelbrot... I així als nostres dies, en què el model més recent que tenim constància consisteix en les urnes de Pólya a les quals s'introdueixen boles noves per tenir en compte la innovació que dona lloc a la llei de Zipf. Alguns treballs del grup en aquesta línia, incloent la figura, són les referències [12, 4].




Com podeu comprovar aquests sistemes presenten molts problemes oberts, que al CRM intentem entendre i potser resoldre amb les millors eines matemàtiques que tenim al nostre abast.

## Neurociència computacional

Se sol dir que el cervell humà és el sistema més complex que coneixem. Però en realitat el cervell comparteix moltes característiques «complexes» amb altres sistemes biològics, com ara la presència de múltiples escales espacials i temporals. El fet que d'entre tots els sistemes biològics coneguts, el cervell hagi estat l'únic que ha donat lloc a la intel·ligència i a la consciència, fa creure que aquest òrgan té quelcom d'especial. Amb el temps els misteris del cervell han anat cedint pas al mètode científic. Així doncs, com qualsevol sistema natural, el cervell obeeix les lleis de la física i es pot estudiar

fent servir les mateixes eines experimentals i analítiques que han revolucionat el nostre món els darrers 200 anys.

Un dels reptes més importants de les neurociències és entendre com la interacció de milions de cel·lules cerebrals, anomenades «neurones», dona lloc al comportament animal. Les neurones es comuniquen mitjançant senyals elèctrics i químics que es propaguen a través d'una xarxa (també complexa!) de connexions. Per tant, des d'aquest punt de vista, el problema d'entendre el funcionament del cervell es redueix a l'estudi de la dinàmica en xarxes d'elements excitables. La situació es complica pel fet que les connexions entre les neurones, i per tant l'estructura de la xarxa, també té la seva pròpia dinàmica. De fet, aquesta dinàmica de la connectivitat neuronal, anomenada «plasticitat sinàptica», està correlacionada amb l'aprenentatge. Això vol dir que quan aprenem alguna cosa, la xarxa de connexions del nostre cervell canvia.

Acabem de descriure els tres ingredients fonamentals per entendre el cervell: l'estructura, la dinàmica i la plasticitat. Malauradament (o potser per sort perquè d'alguna manera d'aquí sorgeix la intel·ligència animal i humana) aquests tres ingredients s'entrellacen en una dansa permanent i constant al llarg de la vida dels organismes.

Al Grup de Neurociència computational del CRM estudiem cadascun d'aquests pilars del funcionament cerebral. D'una banda, se sap relativament poc sobre l'estructura precisa de les xarxes neuronals. Ens interessa especialment la dels circuits corticals, o de l'escorça cerebral, que és la seu de la capacitat cognitiva en els mamífers. De l'altra, les poques dades de què disposem provenen d'experiments tècnicament molt complexos en què es pot arribar a determinar la matriu de connectivitat d'una dotzena de neurones, com a màxim. Per tant, actualment hem d'inferir l'estructura global de xarxes grans (creiem que la unitat computacional al còrtex està formada per centenars, milers o moltes més neurones) a partir d'informació parcial i de mostres molt petites. Una manera d'enfrontar-se a aquest problema és considerar diverses classes de xarxes amb estructura global coneguda, i estudiar-ne l'estadística obtinguda només mirant mostres petites [15]. D'aquesta manera, hem aconseguit demostrar que els circuits corticals no tenen una simple estructura d'agrupaments neuronals (*clusters* en anglès) com s'havia cregut fins ara, sinó que els clústers estan organitzats de forma jeràrquica.

Pel que fa a la dinàmica neuronal, volem destacar un avenç teòric recent del grup. L'estudi del comportament col·lectiu de grans conjunts de neurones recorda els treballs clàssics de la física estadística, com per exemple la teoria dels gasos ideals. Aquesta teoria té com a objectiu descriure l'estat macroscòpic d'un sistema a partir de les interaccions microscòpiques de moltíssimes partícules. A diferència de les partícules d'un gas, les neurones tenen una dinàmica relativament complicada, i les seves interaccions també poden ser complexes. Per aquest motiu, el desenvolupament d'una teoria macroscòpica (o de camp mitjà) del teixit neuronal, ha estat fins avui sobretot una teoria heurística. És a dir, que no s'han pogut derivar les equacions de camp mitjà a partir de lleis fonamentals (les dels elements constituents), tret d'alguns casos molt especials. Aquí nosaltres ens hem beneficiat d'una col·laboració amb físics teòrics experts en la teoria de sincronització, en la qual també s'estudia la dinàmica col·lectiva de sistemes de molts elements, en aquest cas d'oscil·ladors. En aquella àrea s'havien desenvolupat les eines matemàtiques necessàries per derivar equacions de camp mitjà exactes a partir de les lleis microscòpiques [10], i així s'obtenia, entre molts resultats, una solució exacta del famós model de Kuramoto. Resulta que alguns models neuronals (que descriuen la dinàmica del voltatge de les cèl·lules individuals) es poden transformar en oscillador, mitjançant un canvi de variables que transforma el voltatge en la fase de l'oscillador. Aquesta correspondència ens va permetre derivar una equació de camp mitjà exacte per a xarxes anomenades *quadratic integrate-and-fire neurons* (neurones quadràtiques de tipus integra-i-dispara), un model canònic per descriure l'activitat neuronal [8].

Per acabar, arribem a la plasticitat neuronal, el mecanisme més plausible per explicar la formació dels records i l'aprenentatge en el sistema nerviós. Diem «plausible» perquè fins ara això només s'ha demostrat directament en animals molt simples, com ara el llimac marí (treball pel qual el neurocientífic Eric Kandel va rebre el premi Nobel l'any 2000).

La teoria sinàptica de la memòria mira d'explicar els canvis en les connexions neuronals (o pesos sinàptics) provocats per l'activitat neuronal resultant d'un estímul sensorial. Aquests canvis, al seu torn, han de ser reproduïbles espontàniament, sense la necessitat de cap estímul. És a dir, que la xarxa neuronal que fem servir per investigar la teoria sinàptica hauria de ser capaç de produir patrons d'activitat espontanis que s'assemblin als patrons provocats per l'experiència sensorial. Això és el que volem dir quan diem que «ens recordem» d'alguna cosa!

Al CRM estudiem aquest procés modelitzant l'aprenentatge espacial en rosegadors. Triem aquest paradigma experimental perquè ha estat molt estudiat per neurocientífics que van identificar a l'hipocamp de les rates neurones espacialment selectives, les cèl·lules «de lloc» (*place cells*, en anglès). Quan l'animal passa per un lloc determinat, aquestes neurones s'activen amb un ordre molt ben definit i depenent de la selectivitat de cada cèl·lula. Més tard, quan l'animal dorm, s'observen les mateixes seqüències (o gairebé) precisament com prediu la teoria sinàptica! En un model molt simplificat de cèl·lules de lloc podem demostrar que la plasticitat sinàptica durant l'exploració d'un entorn nou produeix canvis de la connectivitat recurrent (entre les neurones de la mateixa xarxa) que reflecteixen la geometria de l'entorn. Això és perquè la selectivitat de les cèl·lules de lloc (que és equivalent a l'ordre de les seqüències) és diferent i única per a cada entorn. Quan aquests canvis són prou grans, produeixen una transició de fase a la xarxa i hi apareixen ones (seqüències) espontàniament [14].

Al Grup de Neurociència Computacional del CRM el nostre objectiu és entendre com funcionen els circuits cerebrals; creiem que les matemàtiques són una eina molt potent que ens ajuda a assolir aquesta fita. Tanmateix, també hem entès que, juntament amb les matemàtiques, és imprescindible conèixer a fons el sistema biològic que pretenem modelitzar (i entendre!). Això implica col·laboracions interdisciplinàries. En particular hem d'estar disposats a analitzar dades rellevants i, si no confirmen els nostres models, també hem d'estar disposats a replantejar-nos-ho tot.

## Modelització matemàtica dels tumors

Tot i la gran quantitat de recursos dedicats a la recerca i al desenvolupament de noves teràpies, el càncer segueix sent una de les principals causes de mort als països occidentals. En l'actualitat, s'estan desenvolupant nous conceptes terapèutics com la medicina personalitzada o la medicina de precisió a fi d'incorporar noves tecnologies (per exemple, òmics) a la pràctica mèdica. Aquests nous conceptes terapèutics sovint es basen en l'extracció d'informació específica del pacient a partir d'eines avançades de diagnòstic i, a continuació, es crea un tractament a mida, que sovint consisteix en un còctel de fàrmacs que respon a un conjunt de les anomalies detectades en un pacient en particular. Aquest enfocament és raonable però no mancat de problemes. Sovint, els metges desconeixen com els diferents fàrmacs interactuen entre si i quin serà el seu efecte global en l'estat clínic del pacient. Els efectes secundaris també són difícils d'establir *a priori*, ja que se solen detectar durant els assaigs clínics, concepte que, dins del paradigma de la medicina personalitzada, és difícil de definir. Per tal de produir protocols de medicina personalitzada eficients, hem d'entendre les interaccions entre els efectes dels diferents fàrmacs. Per això, els models matemàtics són essencials, ja que ens permeten reconèixer les interaccions no lineals entre les diferents dianes terapèutiques i predir el resultat dels tractaments personalitzats en termes racionals.

El comportament de les cèl·lules entre els teixits respon a una sèrie d'estímuls. El seu comportament és el resultat d'una complexa xarxa d'interaccions entre gens i productes genètics que, en última instància, regula l'expressió gènica. Aquests sistemes de regulació de gens solen modelar-se com a sistemes dinàmics no lineals i d'alta dimensió, l'estructura dels quals s'ha modelat en el curs de l'evolució biològica. A més de les dinàmiques complexes intracel·lulars, les cèl·lules també estan influenciades per interaccions intrincades entre diferents components dels sistemes biològics a tots els nivells, des de vies de senyalització complexes i xarxes de regulació gènica fins a efectes no locals complexos, en què les pertorbacions actuen per tot el teixit. Aquests i altres factors

contribueixen a una dinàmica molt complexa en teixits biològics, la qual és una propietat emergent de totes les capes implicades. Per fer front a aquesta complexitat, s'han desenvolupat diversos models de sistemes biològics, especialment en el context del creixement del tumor.

S'ha demostrat que els enfocaments a escales múltiples tenen tant fortaleses com limitacions. Entre les darreres, destaca la intensitat computacional d'aquests models. El nivell de detall que tenen implica que les simulacions de models d'escales múltiples són computacionalment costoses, cosa que limita l'abast d'aquests models. Per simular el creixement en un ventall més ampli de condicions, juntament amb el desenvolupament de tècniques de modelització, cal desenvolupar algorismes i mètodes analítics que ens permetin fer una anàlisi i simulació més eficients d'aquests models. La formulació de mètodes híbrids per a models d'escales múltiples de creixement de tumors és un d'aquests desenvolupaments. La base de les metodologies híbrides és utilitzar models a diferents resolucions en diferents regions del domini de simulació, on les cèl·lules (o altres estructures com els vaixells en models d'angiogènesi) es resolen individualment en alguna regió d'interès. Fora d'aquesta regió, el sistema es descriu mitjançant un model *coarse-grained* de més baixa ressolució, obtingut, per exemple, mitjançant mètodes d'homogeneïtzació. El model homogeneïtzat descriu el sistema a un nivell reduït de detall però amb el benefici d'un cost computacional molt menor. Els reptes involucrats en aquestes metodologies inclouen la definició de criteris per identificar els diversos dominis, derivar models gruixuts coherents amb els seus homòlegs individuals i formular les condicions de contorn apropiades entre les regions *individual-based* i les *coarse-grained*.

Una situació semblant sorgeix en una àrea en la qual s'han dut a terme importants progressos, com ara els sistemes de reacció-difusió estocàstics. Aquests sistemes també són costosos de simular utilitzant mètodes estàndard (per exemple, variacions del mètode Gillespie), motiu pel qual sovint és necessari recórrer a mètodes híbrids. El fonament d'un mètode híbrid és que els nivells de soroll, més o menys associats amb la població local o el nombre de partícules, no són uniformes a tot el sistema, de manera que hi ha regions on les fluctuacions tenen efectes més greus que en altres. Un exemple arquetípic d'aquesta situació és la propagació de fronts com ones viatgeres. En aquests sistemes, la població darrere del front de propagació s'apropa a la capacitat de càrrega del sistema. Si la capacitat de càrrega és prou gran, les fluctuacions a la regió del darrere seran relativament petites, de manera que el sistema es pot descriure pel límit de camp mitjà del sistema. Per contra, davant del front, les fluctuacions dominen el comportament del sistema i, per tant, cal una descripció estocàstica completa. Aquestes inhomogeneïtats en el nivell de soroll s'han explotat per formular mètodes de simulació híbrids. Segons aquesta metodologia, el límit de camp mitjà s'utilitza en regions de baix soroll que després s'acoblen a la dinàmica estocàstica completa que descriu les regions de soroll alt. L'acoblament entre les dues descripcions s'aconsegueix mitjançant condicions de frontera definides adequadament a les interfícies entre el camp mitjà i les regions estocàstiques.

La nostra activitat de recerca s'ha centrat principalment a ampliar i desenvolupar els mètodes híbrids formulats per sistemes estocàstics de reacció-difusió a models estocàstics d'escales múltiples de creixement tumoral. Aquests models consideren fluctuacions tant en el nombre de cèl·lules com en la dinàmica intracel·lular (cicle cel·lular) i, en conseqüència, qualsevol intent de formular un mètode híbrid per a aquests sistemes ha de trobar una manera d'acomodar els dos tipus de soroll. El soroll d'estructura s'associa amb soroll a escala intracel·lular i es manifesta en fluctuacions de la taxa de natalitat. Resultats recents demostren que aquesta font de soroll és almenys tan important com el soroll de la població. En particular, mostrem que la velocitat de propagació de les solucions d'ona viatgera es veu fortament afectada per les fluctuacions de la taxa de natalitat a la vora del front. Més concretament, quan es considera un model en què es tenen en consideració les dinàmiques intracel·lulars (és a dir, les fluctuacions de la taxa de natalitat), la velocitat del front d'ona se sobreestima per un percentatge força significatiu. Tanmateix, quan el model de camp mitjà *coarse-grained* s'acobla al model dinàmic po-

blacional estocàstic complet, la desviació de la velocitat d'ona es rectifica i s'obté un resultat molt més precís. Aquest resultat demostra la utilitat d'aquests enfocaments híbrids: es pot recuperar amb exactitud el comportament previst pels models més detallats, mentre que, via el *coarse-graining* d'alguns d'aquests detalls en regions on no són necessaris, el seu rendiment computacional millora notablement.

## Agraïments

Gràcies a Joan Serrà, per deixar-nos alguna de les seves figures. Valorem el finançament a través dels projectes FIS2012-31324 i FIS2015-71851-P, del MINECO i 2014SGR-1307, de l'AGAUR, així com de la Barcelona Graduate School of Mathematics, a través del Programa María de Maeztu (MINECO).

## Referències

[1] P. Bak, «How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality». Copernicus, Nova York, 1996.

[2] A. Corral, F. Font-Clos, «Processos de ramificació, criticitat i autoorganització: aplicació als desastres naturals». Butll. Soc. Cat. Mat. **29(1)** (2014), 5.

[3] Editorial. «A ton for Thompson's tome». Nature Phys. **13** (2017), 315.

[4] F. Font-Clos, A. Corral, «Log-Log Convexity of Type-Token Growth in Zipf's Systems». Phys. Rev. Lett. **114** (2015), 238701.

[5] J. Harnad, «The Trouble with Physics: The Rise of String Theory, the Fall of a Science, and What Comes Next». The Mathematical Intelligencer **30(3)** (2008), 66.

[6] A. Corral, A. Ossó, J. E. Llebot, «Scaling of tropical-cyclone dissipation». Nature Phys. **6** (2010), 693.

[7] M. Mitzenmacher, «A Brief History of Generative Models for Power Law and Lognormal Distributions». Internet Math. **1(2)** (2004), 226.

[8] E. Montbrió, D. Pazó, A. Roxin, «Macroscopic description for networks of spiking neurons». Phys. Rev. X **5** (2015).

[9] M. E. J. Newman, «Resource letter CS-1: Complex systems». Am. J. Phys. **79** (2011), 800,

[10] E. Ott, T. M. Antonsen, «Low-dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators». Chaos **18** (2008), 037113.

[11] S. Hossenfelder, «Science needs reason to be trusted». Nature Phys. **13** (2017), 316.

[12] J. Serrà, A. Corral, M. Boguñá, M. Haro, J. Ll. Arcos, «Measuring the Evolution of Contemporary Western Popular Music». Sci. Rep. **2** (2012), 521.

[13] I. Serra, A. Corral, «Deviation from power law of the global seismic moment distribution». Sci. Rep. **7** (2017), 40045.

[14] P. Theodoni, B. Rovira, A. Roxin, «A model of plasticity-dependent network activity in rodent hippocampus during exploration of novel enironments». BioRXIV (2017), 118489.

[15] M. Vegué, D. Perin, A. Roxin, «On the structure of cortical micro-circuits inferred from small sample sizes». BioRXIV (2017), 118471.

[16] D. J. Watts, «A twenty-first century science». Nature **445** (2007), 489.